数理解析研究所講究録
810巻 1992年 45-54

Isotropic 2nd microlocalization due to Lebeau and Γ-analytic microfunctions

東大理　片岡 清臣 (Kiyômi Kataoka)
東大理　竹内 潔 (Kiyoshi Takeuchi)

§0 Introduction

Lebeau は1985年に論文 [5] において、余接bundle $T^*\mathbb{R}^n$ の isotropic submfd に沿った microfunction に対する 2nd microlocalization の理論を創始した。しかしながら、その理論は Hyperfunction の FBI 変換を用いて記述されていたため、代数解析的対応物がはっきりしていなかった。本稿においては彼の定義した第2超局所台 $SS^2_\Gamma u$ と同値な条件が microfunction としての定義正則函数によって記述できたことを報告する。その結果を用いると、Lebeau のいう "Γ-analytic microfunction" なる陪特性帯 Γ に沿って一意接続性を持つ microfunction の class は、よく知られた正則パラメーター付き microfunction よりも真に広い class でありながら、local Bochner の定理を用いて micro 解析性が sweep-out できる class に他ならないことがわかる。さらに Kashiwara-

Laurent [4] の 2nd microlocalization の理論を陪特性帯上に制限した場合の Bony type ([1]) の microlocal Holmgren の定理の analogy を得ることができる。

§1 Lebeau の second FBI transformation

1.1 幾何学的 conditions

まず

$$(1.1)\quad \begin{cases} M = \mathbb{R}^n_x = \mathbb{R}^d_{x'} \times \mathbb{R}^{n-d}_{x''} \\ X = \mathbb{C}^n_z = \mathbb{C}^d_{z'} \times \mathbb{C}^{n-d}_{z''} \end{cases}$$

$$x' = (x_1, \cdots, x_d) \quad \cdots\cdots$$

として、余接 bundle $\sqrt{-1}\,T^*M$ の regular involutive な submanifold Λ と、その1つの bicharacteristic leaf Γ と $\mathbb{R}^{n-d}$ の fixed unit vector $\mathring{\xi}''$ を用いて次のように定める。

$$(1.2)\quad \begin{cases} \Lambda = \left\{ (x', x''; \sqrt{-1}\,\xi' dx' + \sqrt{-1}\,\xi'' dx'') \;\middle|\; \xi' = 0 \right\} \subset \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n \\ \cup \\ \Gamma = \left\{ \qquad \text{〃} \qquad \middle|\; \begin{array}{l} x'' = 0,\ \xi' = 0 \\ \xi'' = \mathring{\xi}'' \end{array} \right\} \end{cases}$$

この定義より $\Gamma \cong \mathbb{R}^d$ ゆえ、$\mathring{T}^*\Gamma$ を $\mathbb{C}^n$ に次のように埋め込むことができる。

$$(1.3)\quad \begin{array}{ccc} \mathring{T}^*\Gamma & \hookrightarrow & \mathbb{C}^d_{z'} \times \mathbb{C}^{n-d}_{z''} = \mathbb{C}^n_z \\ \Psi & & \Psi \\ (x'; \xi' dx') & \longrightarrow & (x' - \sqrt{-1}\,\xi', 0) \end{array}$$

1.2 Definition of Γ-analytic microfunction

Lebeau [5] に従って $u(x) \in \mathcal{B}_{cpt}(\mathbb{R}^n)$、すなわちコンパクト台の Hyperfunction の Γ に沿ったFBI変換を次のように定義する。

Def. 1.1 (2nd FBI transf. along Γ)

$$T_\Gamma^2 u\,(z;\lambda,\mu)$$

(1.4) $$\underset{def}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\exp\left[-\frac{\lambda\mu^2}{2}(z'-x')^2-\frac{\lambda}{2}(\mu z''-x'')^2-\sqrt{-1}\,\lambda x''\cdot\mathring{\xi}''\right]dx$$

ここで $z=(z',z'')\in \mathbb{C}^d_{z'}\times\mathbb{C}^{n-d}_{z''}$

$\lambda,\mu>0$ はパラメーターとする。

u を $\Gamma\subset\sqrt{-1}\,T^*M$ 上の microfunction としてみたときの"特異性"を記述する概念として次の第2超局所台 $S_\Gamma^2\subset\mathbb{C}^n$, $\mathring{SS}{}_\Gamma^2 u\subset\mathring{T}^*\Gamma$ を定義しよう。

Def 1.2 ($S_\Gamma^2 u$, $\mathring{SS}{}_\Gamma^2 u$)

$\mathring{z}\in\mathbb{C}^n$ に対して、

$\mathring{z}\notin S_\Gamma^2 u$

(1.5) $$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathring{z}\in{}^\exists U:\text{nhd in }\mathbb{C}^n,\ {}^\exists\mu_0>0,\ {}^\exists\delta>0,\\ \quad {}^\exists f:(0,\mu_0)\longrightarrow\mathbb{R}^+\ (\text{減少関数})\quad \text{s.t.}\\ \left|T_\Gamma^2 u\,(z;\lambda,\mu)\right|\leqq\exp\left[\frac{\lambda\mu^2}{2}|\mathrm{Im}\,z|^2-\delta\lambda\mu^2\right]\\ \text{for }{}^\forall z\in U,\ 0<{}^\forall\mu<\mu_0,\ f(\mu)<{}^\forall\lambda \end{array}\right.$$

また $\overset{\circ}{SS}{}^2_\Gamma u$ を 式 (1.3) により $\overset{\circ}{T}{}^*\Gamma$ を $\mathbb{C}^n$ の subset と同一視することにより、

$$(1.6) \qquad \overset{\circ}{SS}{}^2_\Gamma u \underset{\mathrm{def}}{=} \overset{\circ}{T}{}^*\Gamma \cap S^2_\Gamma u \qquad \text{と定義する。}$$

以上の定義はコンパクト台の Hyperfunction u に対するものであったが、コンパクト台でない場合も台を cut-off して (1.4) 式の積分変換をほどこすことにより $S^2_\Gamma u$, $\overset{\circ}{SS}{}^2_\Gamma u$ が定義されることを注意しておく。また、これらの第2超局所台は $\Gamma \subset \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n$ 上 microfunction として一致する2つの Hyperfunction に対しては同一のものを与えることが容易に check される。よって Γ-analytic microfunction が次のように定義される。

<u>Def 1.3 (Γ-analytic microfunction)</u>

for $u \in \mathcal{C}_M|_\Gamma$

u が Γ-analytic microfunction $\iff$ $\overset{\circ}{SS}{}^2_\Gamma u = \phi$

§2 <u>定義正則函数による full characterization</u>

さて本節においては、"Γ-analytic microfunction" という条件を u の定義正則函数についての言葉で記述する結果を述べよう。

Theorem 2.1

$u(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して次の2条件は同値。

i) $u(x)$ は Γ-analytic

ii) u は $\mathcal{C}_M|_\Gamma$ の section として次のように記述できる。

$$(2.1) \quad u(x) = \left[\int_{|\xi''-\mathring{\xi}''| \leqq \varepsilon} F(x+\sqrt{-1}(0,\mathring{\xi}'')0, \xi'')\, d\sigma(\xi'') \right]$$

ここに $F(z,\xi'')$ は C^∞ ft で z について正則で次の領域で定義されている。

$$(2.2) \quad \left\{ (z', z'', \xi'') \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{R}^{n-d} \;\middle|\; \begin{array}{l} |z| < \varepsilon,\ |\xi''| = 1 \\ |\xi''-\mathring{\xi}''| \leqq \varepsilon \\ \mathrm{Im}\, z''\cdot\xi'' > C\left[|\mathrm{Im}\, z''|^2 + (|\mathrm{Re}\, z''|^2 + |\xi''-\mathring{\xi}''|^2)\cdot|\mathrm{Im}\, z'| \right] \end{array} \right\}$$

for some $\varepsilon > 0$, $C > 0$

Remark 2.2

$n-d=1$ の時、Γ は $\sqrt{-1}S^*M$ 内で考えれば、Lagrangean submfd となっている。この時、$\mathring{\xi}''=\pm 1$、$\xi'' \in \mathbb{R}^1$ ゆえ、上記 (2.1) のような積分表示は不要になる。$n-d=1$, $\mathring{\xi}''=1$ の時、ii) の条件は以下のようになる。

ii) $(n-d=1,\ \mathring{\xi}''=1)$

$$u(x) = [F(z)] \tag{2.3}$$

F は

$$\left\{ (z', z'') \in \underset{\mathbb{C}^n}{\underset{\|}{\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^1}} \;\middle|\; \begin{array}{l} |z| < \varepsilon \\ \operatorname{Im} z'' > C\,|\operatorname{Re} z''|^2 \cdot |\operatorname{Im} z'| \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

$$\text{for some } \varepsilon > 0,\ C > 0$$

において正則である。

もし u が z' を正則パラメーターとしてもつ microfunction であれば上の F は

$$\left\{ \quad '' \quad \middle|\ |z| < \varepsilon,\ \operatorname{Im} z'' > 0 \right\} \tag{2.5}$$

まで正則にのびてしまうことに注意すると、"Γ-analytic microfunction" が z' を正則パラメーターとしてもつ microfunction $\mathcal{C}_{x''}\mathcal{O}_{z'}$ よりも真に広い $\mathcal{C}_M|_\Gamma$ の subclass を定めていることがわかる。

(Th. 2.1 の schetch of proof)

$T^2_\Gamma u$ と指数因子のみのずれをもつ次の "modified 2nd FBI-transf" $\widetilde{T}^2_\Gamma u$ を導入する。

$$\widetilde{T}^2_\Gamma u(z;\lambda,\mu)$$

$$\underset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \exp\left[-\frac{\lambda\mu^2}{2}(z'-x')^2 - \frac{\lambda}{2}(\mu z'' - \sqrt{-1}\,\mathring{\xi}'' - x'')^2\right] dx \tag{2.6}$$

この $\widetilde{T}^2_\Gamma u$ の増大度によって $\overset{\circ}{S}S^2_\Gamma u$ と同値な条件を記述することができる。さらに以下のような inversion formula をもつ。

<u>Lemma 2.3 (inversion formula for $\widetilde{T}^2_\Gamma$)</u>

$\forall a, b > 0$, $\forall u \in \mathcal{B}_{cpt}(\mathbb{R}^n)$ に対して.

$$
\begin{aligned}
&u(x) \\
(2.7)\quad &= \text{const.} \int_{S^{d-1}_{\zeta'} \times S^{n-d-1}_{\zeta''} \times \mathbb{R}^+_\lambda \times \mathbb{R}^+_\mu} e^{-\frac{a^2\lambda\mu^2}{2} - \frac{b^2\lambda}{2}} \left[1 - \frac{\sqrt{-1}\,\zeta' \cdot D_{z'}}{a\lambda\mu^2}\right]\left[1 - \frac{\sqrt{-1}\,\zeta'' \cdot D_{z''}}{b\lambda\mu}\right] \\
&\qquad \widetilde{T}^2_\Gamma u\left(z' - \sqrt{-1}\,a\zeta', \frac{z'' - \sqrt{-1}\,b\zeta'' + \sqrt{-1}\,\mathring{\zeta}''}{\mu}; \lambda, \mu\right) \lambda^{n-1} \cdot \mu^{2d-1} d\sigma(\zeta')\, d\sigma(\zeta'')\, d\lambda\, d\mu
\end{aligned}
$$

この等式は本質的には.

$$
(2.8)\qquad u(x) = \int \delta(x' - y')\,\delta(x'' - y'')\, u(y)\, dy
$$

という形に reduce する。

Th. 2.1 はこの Lemma によって $\widetilde{T}^2_\Gamma u$ の増大度を u の定義正則函数の正則域の情報に変換することにより得られる。詳細は [8] を見られたい。 ▨

§ 3 <u>Γ-analytic microfunction の一意接続性</u>

§2で得られた定義正則函数による characterization により、以下のような Lebeau による一意接続性についての結果を local Bochner の定理という解析接続の定理のみを用いて初等的に示すことが可能となる。

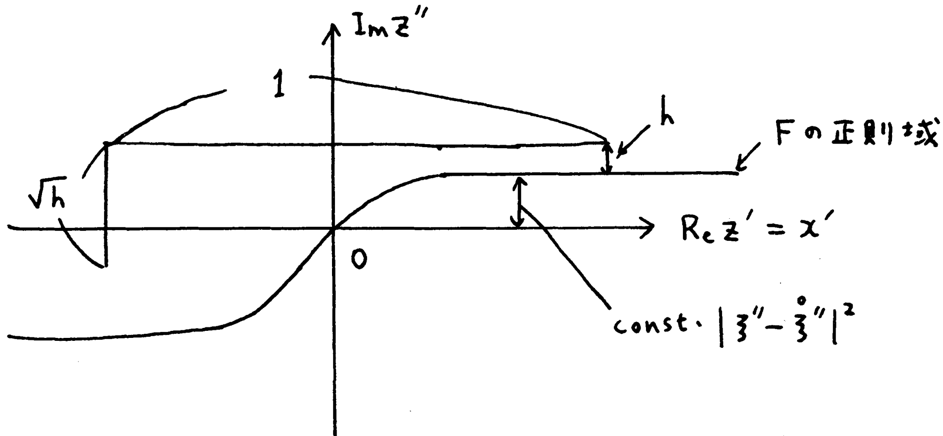
Th 3.1 (unique continuation property)

$u(x) \in \mathcal{C}_M|_\Gamma$ が "Γ-analytic microfct" であれば、u は Γ に沿って一意接続性を持つ。

(schetch of proof)

Γ が $x' \in \mathbb{R}^d_{x'}$ によって parametrize されていること、及び (2.1) 式の F が ξ'' を fix したとき以下のような領域で正則になることに注意しつつ local Bochner の定理を用いる。

(3.1)



ここで $\sqrt{h}$ は h よりも 0 に近づく speed が遅いこと、$|\xi'' - \mathring{\xi}''|^2$ は、(2.1) 式の積分領域を縮めることにより十分小と仮定してよい。何故なら、$\mathring{\xi}''$ のまわりに積分領域を縮めたことによる効果は Γ 上の microfunction としては 0 だからである。

∎

さらに regular involutive な Λ 上の Kashiwara-Laurent の 2nd microlocal analysis の結果を $\Gamma \subset \Lambda$ 上に制限すると、$T^*\Gamma$ 上での singular spectrum の条件で Γ 上の半空間に台をもつ $\mathcal{C}_M|_\Gamma$ の section がないこと、いわゆる microlocal Holmgren の定理が成立したが、その analogy が $\mathring{SS}^2_\Gamma u \subset \mathring{T}^*\Gamma$ に対しても成り立つ。すなわち、

<u>Th 3.2 (microlocal Holmgren)</u>

$\mathring{p} \in \Gamma$: 1点, φ : Γ 上の real-valued real analytic function s.t.

$$\varphi(\mathring{p}) = 0, \quad d\varphi(\mathring{p}) \neq 0$$ とする。

$u \in \mathcal{C}_M|_\Gamma$ に対して、

$$\pm d\varphi(\mathring{p}) \notin \mathring{SS}^2_\Gamma u$$ が成り立つ時、

$\mathring{p}$ の n.h.d で、u が $\{\varphi < 0\}$ で 0。

$\Rightarrow$ $\mathring{p}$ の n.h.d で u が 0。

この定理も Th 2.1 を精密化した結果と解析接続のみで証明される。

<u>Remark 3.3</u>

Th 3.1 の proof において $\sqrt{h}$ が h よりも 0 に近づく speed が遅いことを用いたが、注意深い考察により、同じ order でもよいことが分かる。

References

[1] Bony : Extensions du théorème de Holmgren, Sém. Goulaouic - Schwarz 1975 - 1976, exposé 17.

[2] Bony - Schapira : Propagation des sing. analytiques pour les solutions des équations aux dérivès partielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26, 1 (1976), pp 81 - 140

[3] Kashiwara - Kawai : Second microlocalization and Asymtopic Expansions, Lect. Note in Physics No. 126, pp 21 - 76

[4] Kashiwara - Laurent : Théorèmes d'annulation et deuxième microlocalisation, Prepublication d'Orsay.

[5] Lebeau : Deuxième Microlocalisation sur les sous-variétés isotropes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35, 2 (1985), pp 145 - 216

[6] Okada - Tose : FBI - transf. and second microlocalization, J. Math. pures et appl. 70, 1991, pp 427 - 453.

[7] S-K-K : Microfes and pseudodifferential equations, Lect. Note in Math. Vol 287, Springer Verlag, 1973. pp 265-529

[8] Takeuchi : Master thesis I, II, (1992), presented to. Univ. of Tokyo.